Linear Algebra
(Review)

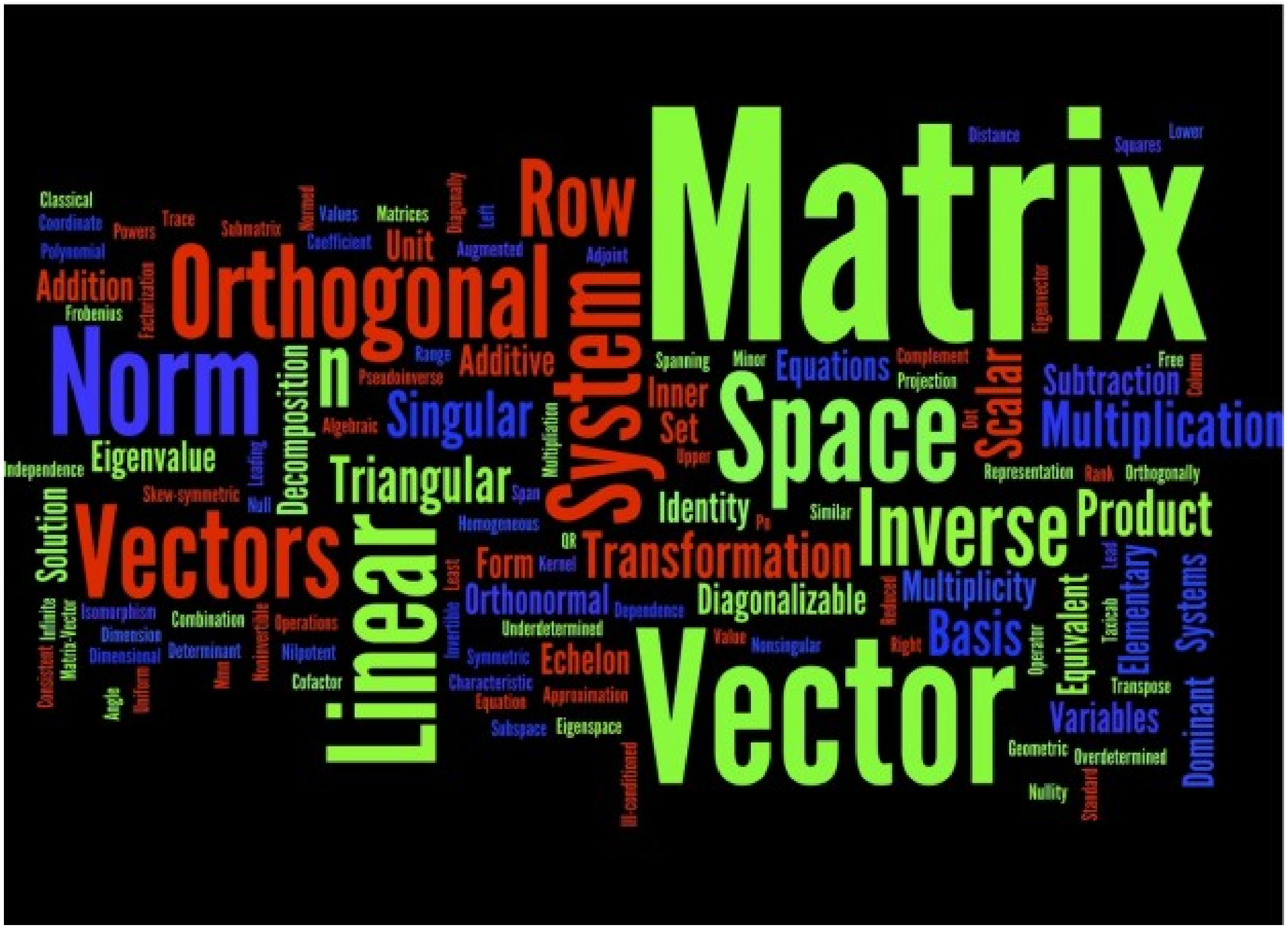
서울대학교 4차 산업혁명 아카데미
전인수 (isjeon@vision.snu.ac.kr)

May 29, 2017

Chapter 0. Introduction

Linear Algebra?!!

0.1. 우리는 왜 Linear Algebra를 배우려고 하나요?



[Link]

0.2. 사실 적용되지 않는 (기술) 분야가 거의 없습니다...

- Abstract Math
- Chemistry
- Coding Theory
- Cryptography
- Economics
- Games
- Genetics
- Computer Vision
- Networking
- Sociology
- and so on ...

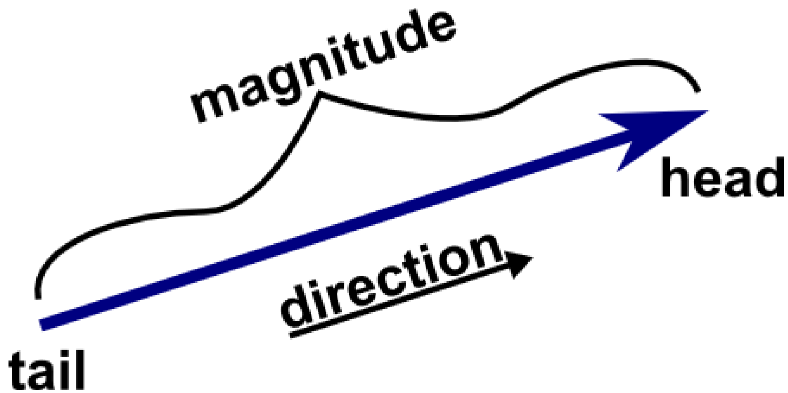
0.3. Linear Algebra (Review) 강의 개요

- **Linear** (선형 공간을 표현하는) **Algebra** (문법 or 체계)

- 앞으로 수업을 진행하기 위해 필요한 **최소한의 지식**을 빠르게… 함께 살펴볼 예정입니다…

- 일종의 언어.. 이기 때문에.. 초반에는 어느정도 (주입식) **암기**가 필요합니다

- 한글 보다 영어 표현이 직관적이고, 또 정확한 편이라 섞어 사용하겠습니다. Ex) ~~선형대수, 속도, 외적~~



Chapter 1. Vector

Vector의 정의에 대해서 알아봅시다

1.1. 벡터의 의미

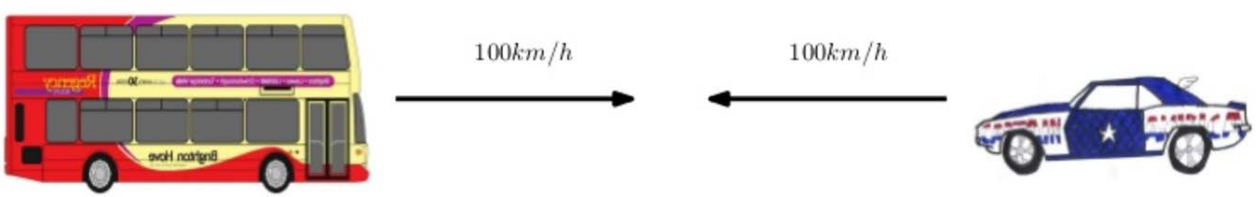
- 벡터의 유래
  - 벡터(Vector)는 ‘나르다’ 라는 의미에서 라틴어 동사 ‘vehere’에서 유래되었습니다
  - ‘무엇인가를 나르는 것’ 이라는 의미
- 수학과 물리학에서의 개념
  - 크기와 방향으로 결정되는 양
  - 예) 힘(force)는 크기만으로는 그 성질을 온전히 표현할 수 없고, 방향도 같이 고려해야 함으로 벡터로 표현된다.

1.2 백터의 개념

- 물리적 현상 등을 표현할 때 – 대상을 양(quantity)으로 표현

- 양(quantiy)는 스칼라(scalar) 혹은 벡터(vector)로 나뉜다
  - 스칼라 값은 오로지 크기만으로 완전히 그 양을 표현할 수 있는 것으로, 물체의 질량, 소요된 시간, 길이, 열량 등에 해당
  - 벡터(vector)는 이와 달리 크기와 함께 방향도 같이 존재하는 양으로 힘, 속도, 변위와 같은 양

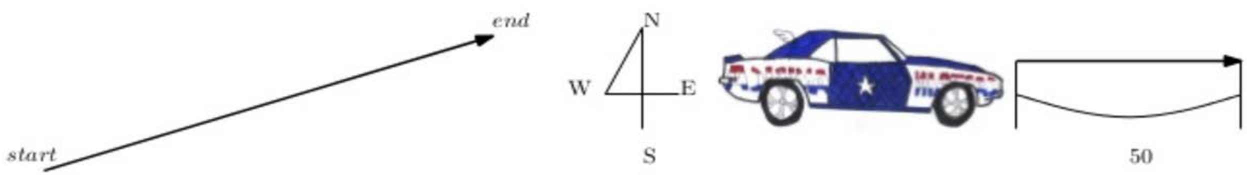
- 속도(velocity)와 속력(speed)의 차이
  - 속도는 벡터, 속력은 스칼라



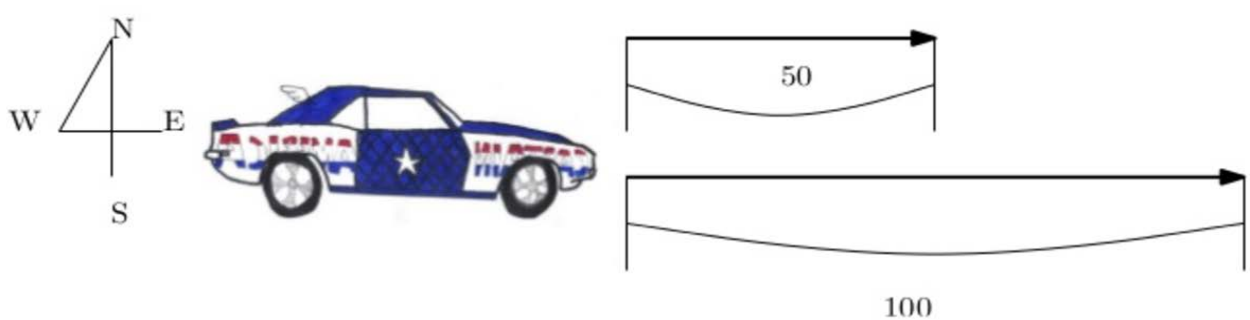
동일한 속력으로 서로 마주 보며 달리는 차량의 속도

1.3. 화살표를 이용한 벡터의 표현

- 벡터를 표현하는 가장 직관적인 방법은 화살표를 이용
- 화살표: 시점(start point)과 종점(end point)로 구성
- 화살표의 방향은 벡터의 방향을 시각적으로 표현하고, 화살표의 길이는 벡터의 크기를 시각적으로 표현



벡터의 시각적 표현과 달리는 자동차 속도 표현의 예



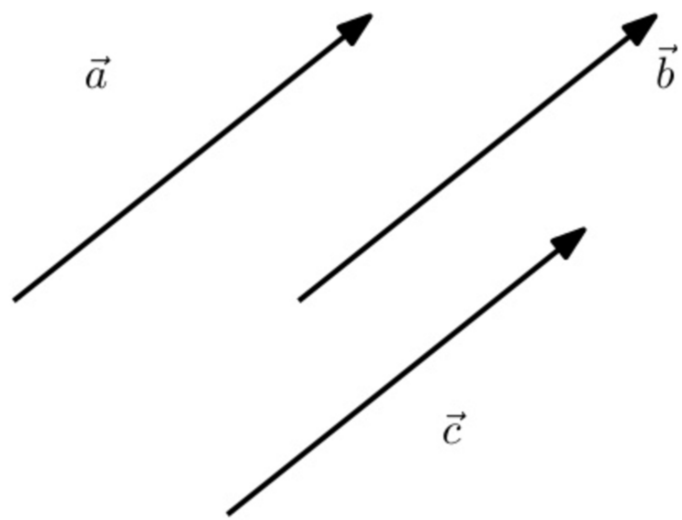
속력이 두 배로 늘어난 자동차의 속도

1.4. 벡터의 표기법

- 벡터의 표기법

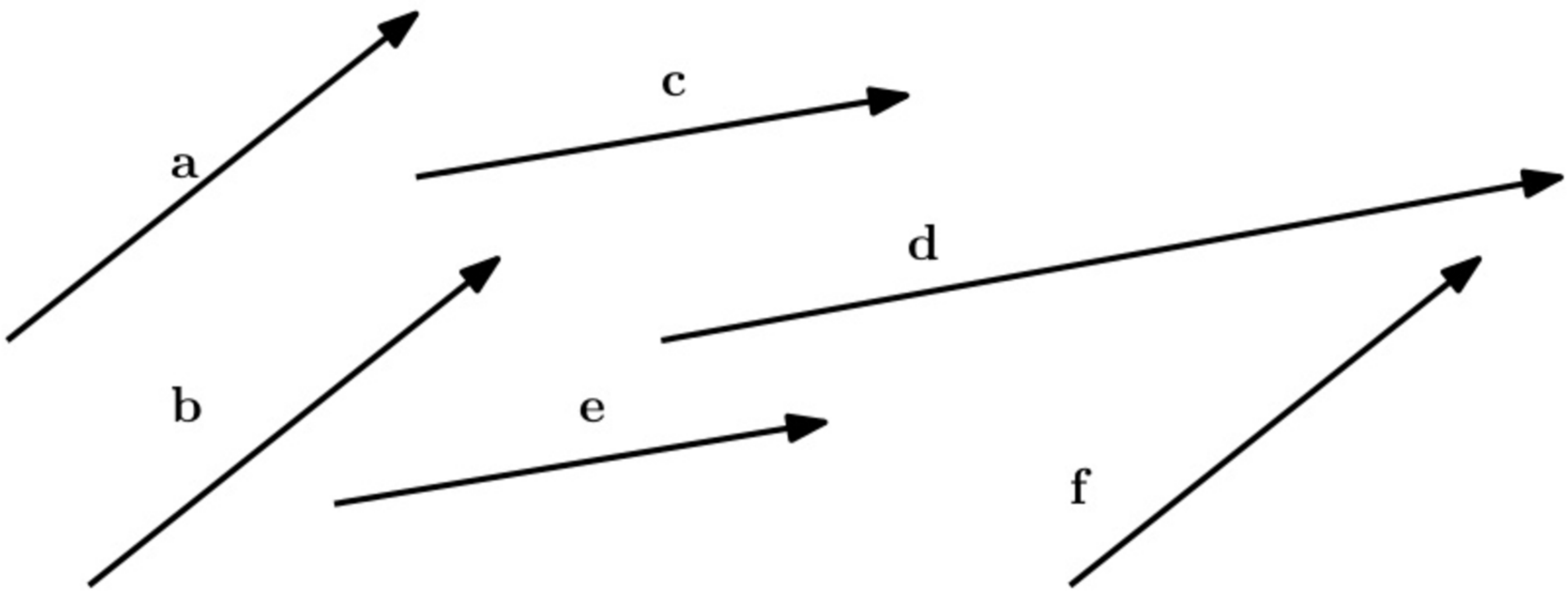
$$\vec{a}, \mathbf{a}$$

- 동등벡터
  - 크기와 방향이 같으면 모두 동등한 벡터로 간주



동등벡터

1.5. 동등벡터 찾기

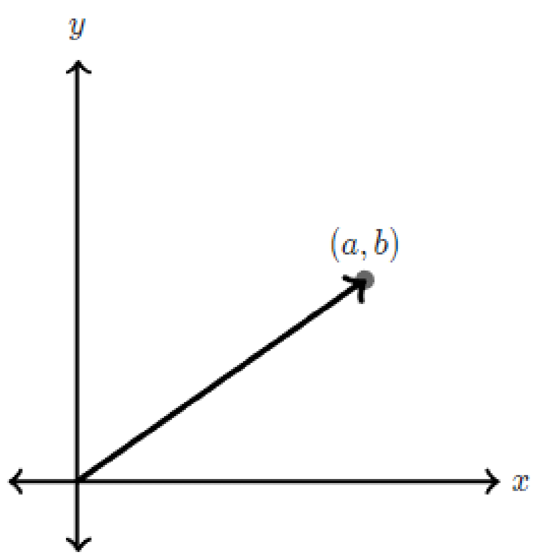


동등벡터 찾기

1.6. 벡터의 수학적 표현

- tuple (ordered list)을 이용한 표현

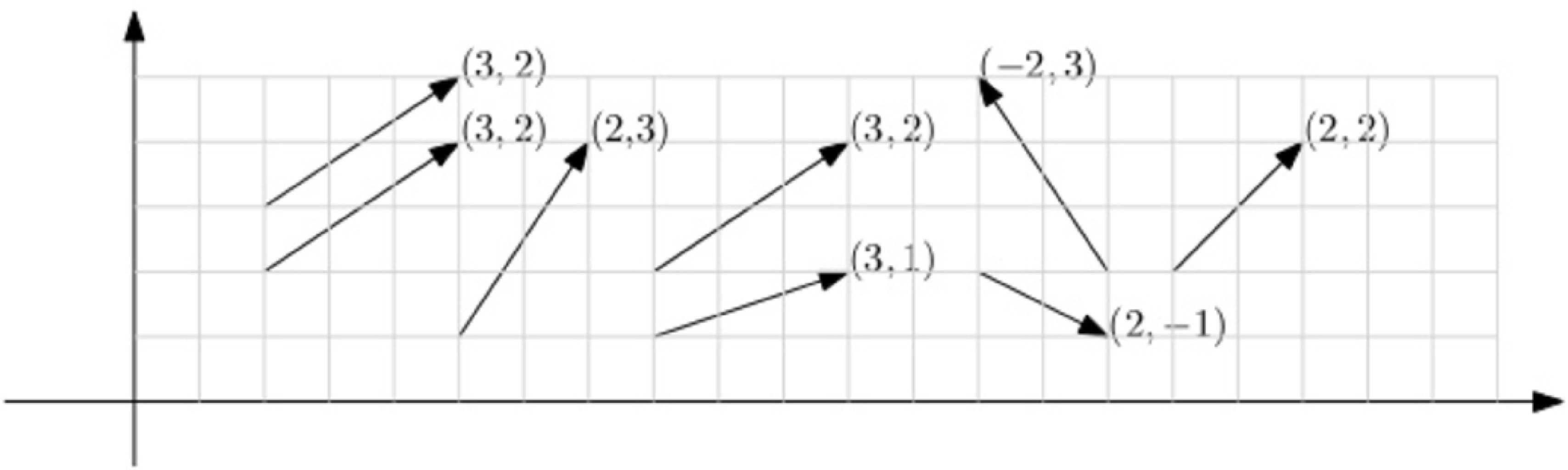
n-튜플(tuple)
$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n)$
n 개의 차원을 가진 공간에서 그려지는 화살표 $= n$차원 벡터



$$\vec{v} = (a, b) \in (\mathbb{R}, \mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^2$$

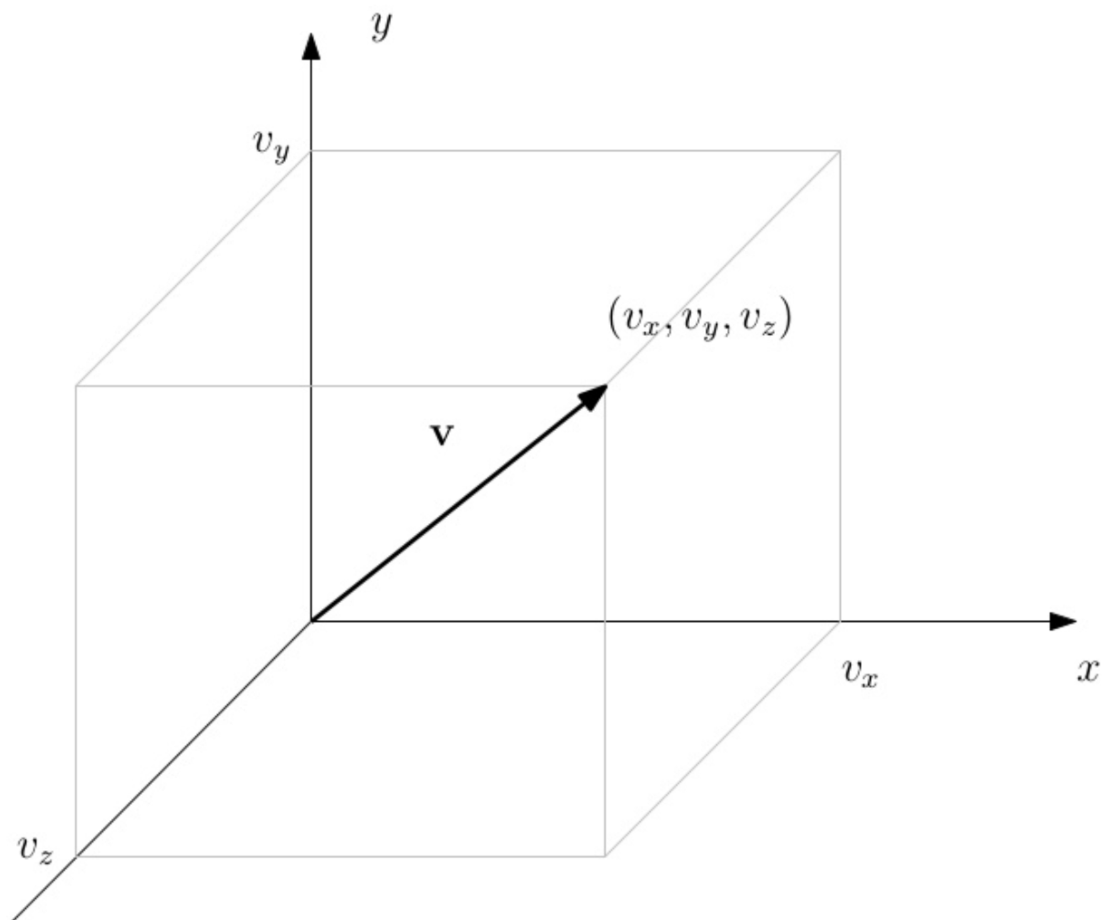
1.7. 2차원 벡터

- 2-tuple (ordered list) 로 표현



1.8. 3차원 벡터

- 3차원 벡터는 2차원 벡터에 축(axis)를 하나 더하면 된다



1.9. Vector의 확장 – n 차원

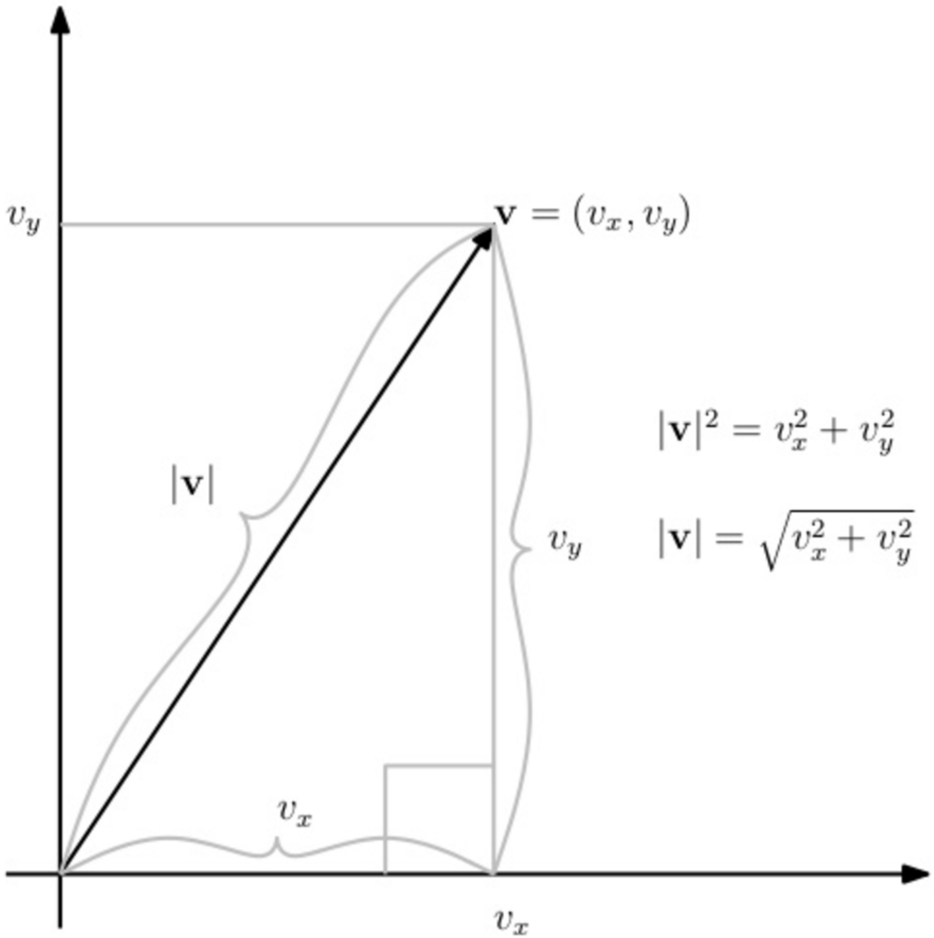
- n 차원 Vector = n-tuple vector

$$\vec{x} = (x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}, ..., \mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^n$$

- 벡터의 집합으로 n차원 실수공간 표현

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, ..., n\}$$

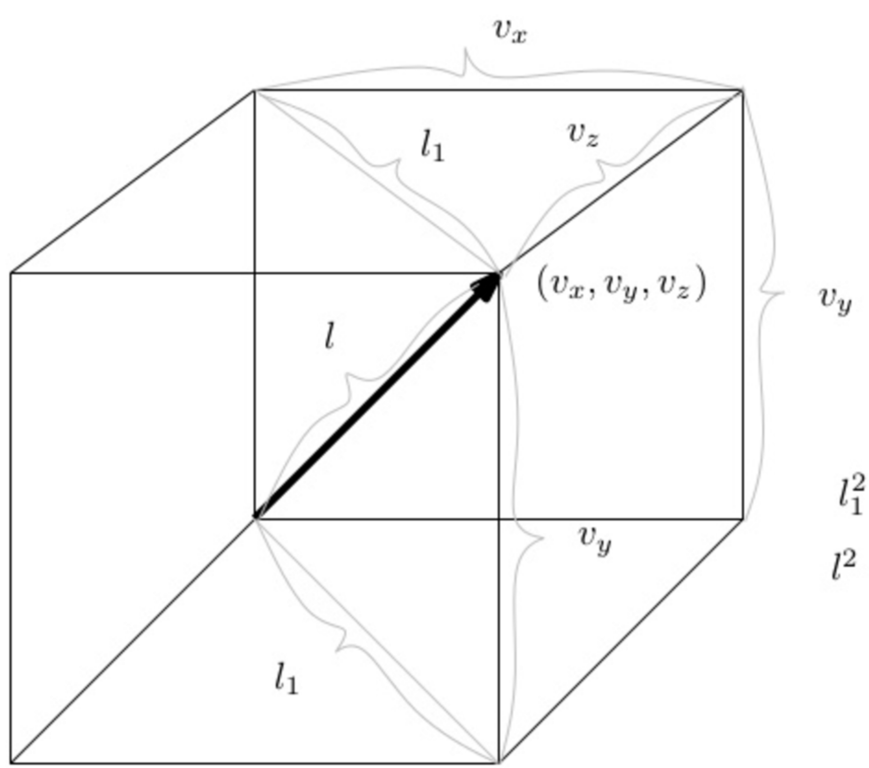
1.10. 벡터의 크기



- Vector의 크기는, '길이'에 대한 상식적 정의에 따라, 스칼라 값이며 양의 값
- 벡터의 크기를 구하는 함수를 Norm이라고 하며 $\|\boldsymbol{v}\|$ 으로 표현
- 이는 피타고라스의 정리를 이용하면 쉽게 구할 수 있다.

1.11. 3차원 벡터의 크기

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$$
$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



$$l_1^2 = v_x^2 + v_z^2$$
$$l^2 = l_1^2 + v_y^2$$

1.12. n차원 벡터의 크기 – Norm

- Euclidean (or l2) Norm의 수학적 정의

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

- n차원에서 scalar로 mapping 하는 함수 f 이며 다음과 같은 성질을 만족

1. For all $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \geq 0$ (non-negativity).
2. $f(x) = 0$ if and only if $x = 0$ (definiteness).
3. For all $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $f(tx) = |t| f(x)$ (homogeneity).
4. For all $x, y \in \mathbb{R}^n$, $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ (triangle inequality).

1.13. Norm의 일반화

- l-p Norm (L-p 공간에서 정의 되는 벡터의 크기)
  - 길이, 혹은 크기의 정의를 l2와는 다르게 표현

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

- ex)

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \qquad \|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

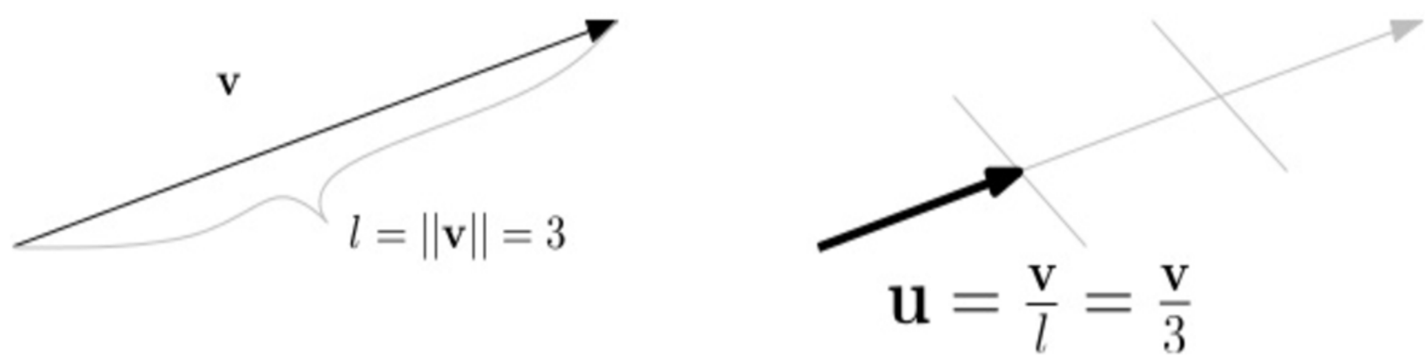
1.14. 단위백터

- 단위 벡터(Unit Vector)는 길이가 1인 벡터 (Norm(v) = 1)

  예) $\hat{i} = (1,0) \quad \hat{j} = (0,1)$

- 어떤 벡터의 방향과 일치하는 단위벡터(Unit Vector)를 구하는 작업은 종종 많은 응용에서 필요

- 정규화(Normalization): 벡터의 길이를 1로 만드는 작업



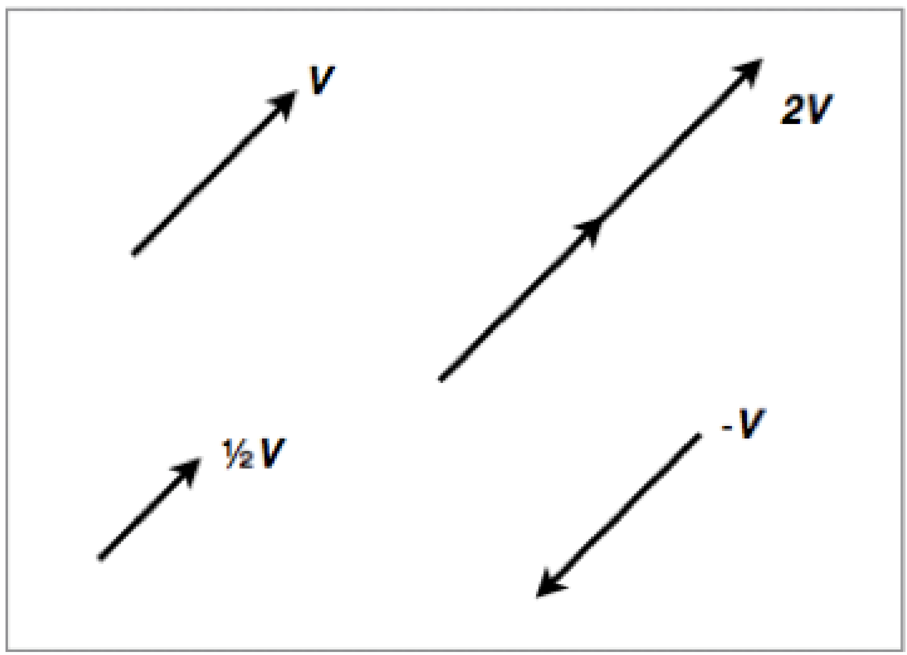
Chapter 2. Vector Operation

Vector의 연산에 대해서 알아봅시다

2.1. 벡터와 스칼라의 곱셈

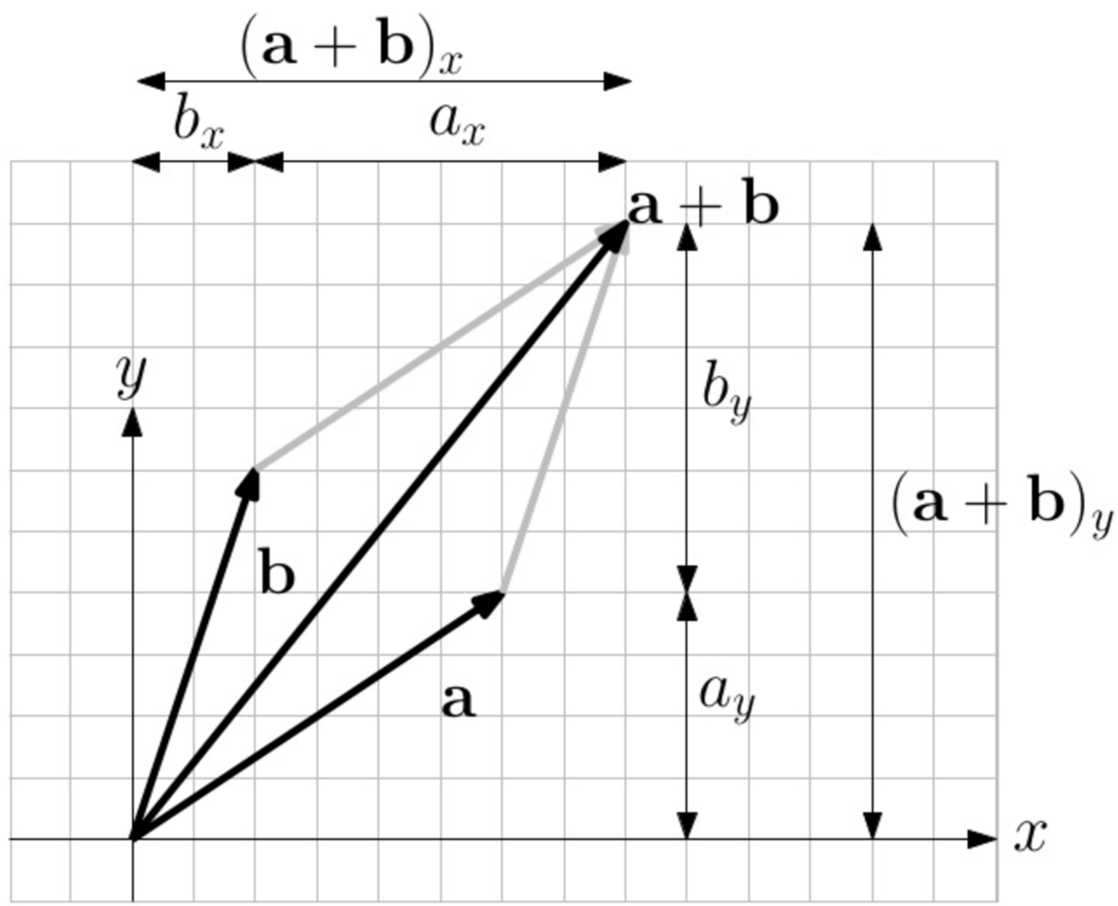
벡터는 크기만을 가진 스칼라와 곱할 수 있다. 어떤 스칼라 값 s가 있다고 하자, 이 스칼라 값과 벡터 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$를 곱한 $s\mathbf{v}$는 다음과 같다.

$$s\mathbf{v} = (sv_x, sv_y, sv_z)$$



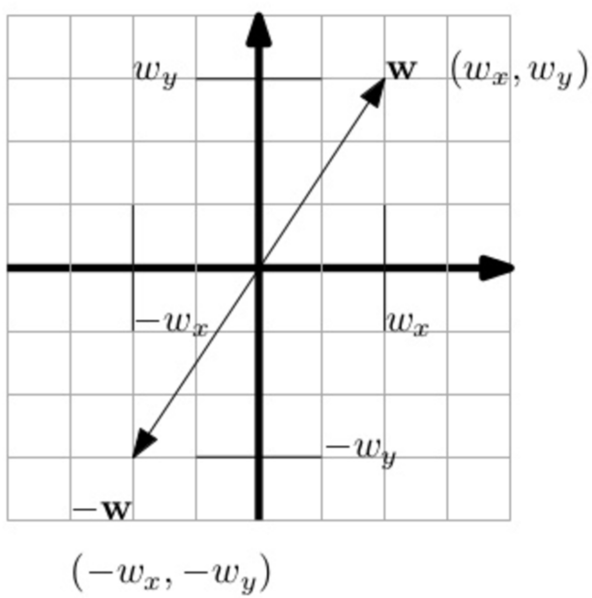
2.2. 벡터의 덧셈

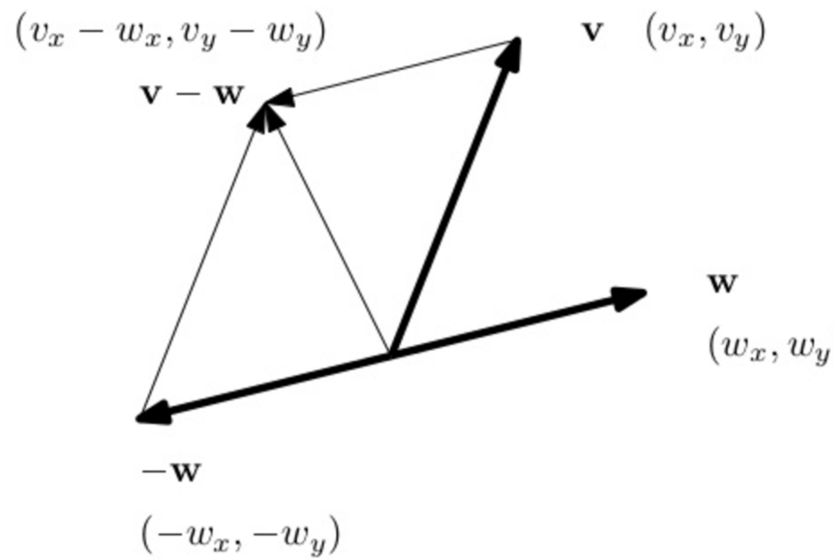
$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_x + w_x, v_y + w_y, v_z + w_z)$$



2.3. 벡터의 뺄셈

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (v_x - w_x, v_y - w_y, v_z - w_z)$$





2.4. 벡터의 연산 정리

Addition	$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
Subtraction	$(a_1, b_1) - (a_2, b_2) = (a_1 - a_2, b_1 - b_2)$
Scalar multiplication	$k \cdot (a, b) = (k \cdot a, k \cdot b)$

ex)

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{w} &= (1, -5) + (8, 4) \\ &= (1 + 8, -5 + 4) \\ &= (9, -1) \end{aligned}$$

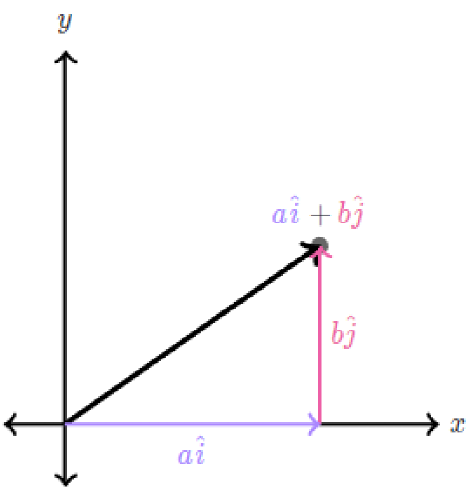
$$\begin{aligned} 6\vec{w} &= 6 \cdot (-1, -3) \\ &= (6 \cdot (-1), 6 \cdot (-3)) \\ &= (-6, -18) \end{aligned}$$

2.4. 단위 벡터를 이용한 벡터 표현

- Magnitude가 1인 단위 벡터 (Unit Vector)

$$\hat{i} = (1, 0)$$
$$\hat{j} = (0, 1)$$

- Vector (3,4) 를 Unit vector의 조합으로 표현하면?



$$3\hat{i} + 4\hat{j}$$

Chapter 3. Vector Dot Product

벡터의 내적에 대해서 알아 봅시다.

3.1. 벡터의 내적 (Dot product)

- 내적 (Dot Product) - Scalar product 라고도 부름

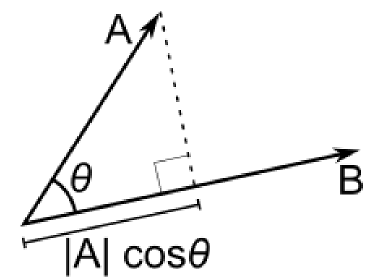
$$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

- 예)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3, 1, 8) \cdot (4, 2, 3)$$
$$= 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 8 \cdot 3$$
$$= 12 + 2 + 24$$
$$= 38$$

3.2. 내적의 의미

- 두백터 **a**와 **b**가 이루는 사이각을 $\boldsymbol{\theta}$ 라고 했을 때, 내적의 크기는 다음과 같다



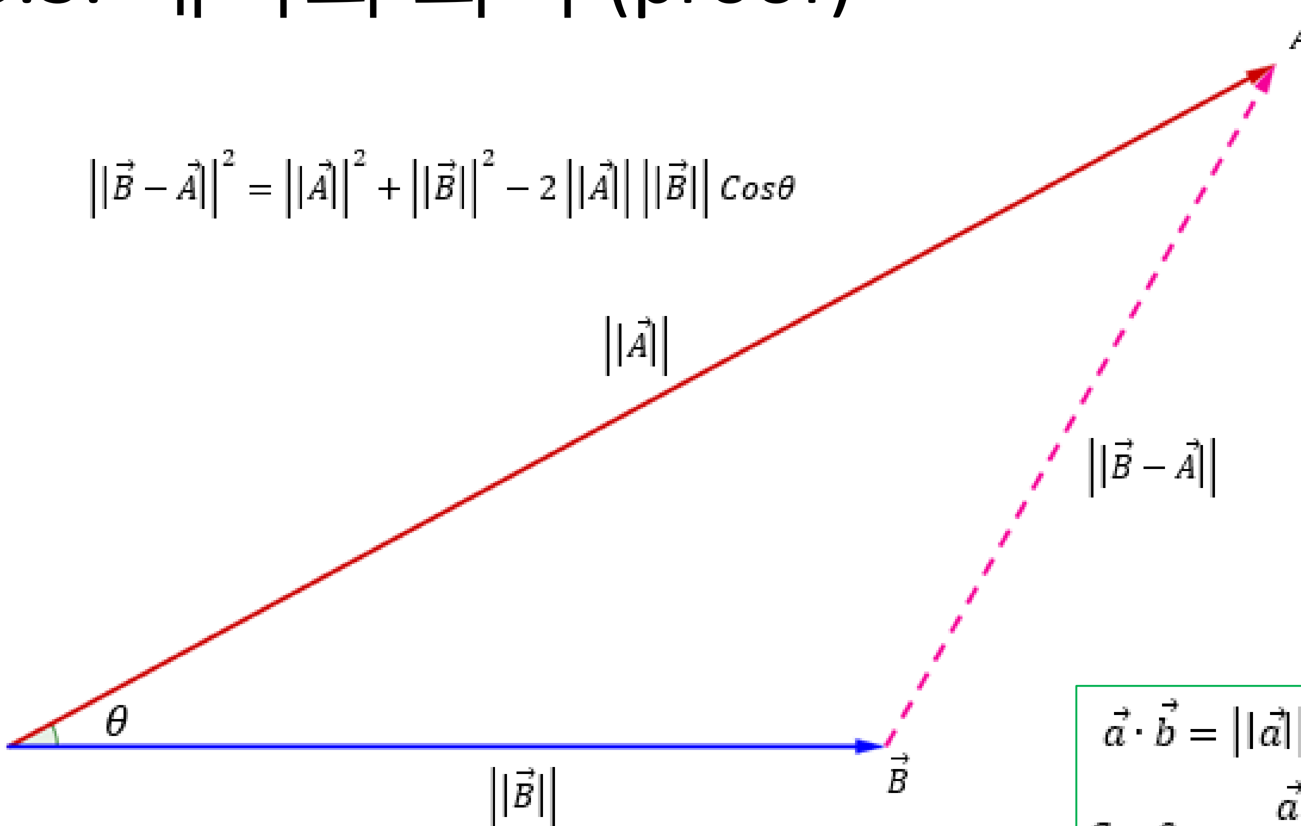
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \ \|\mathbf{b}\| \cos(\theta)$$

- 즉, 각도 $\boldsymbol{\theta}$를 내적으로 표현 할 수도 있다.

$$Cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{a}|| \, ||\vec{b}||} \qquad \theta = Cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{a}|| \, ||\vec{b}||}\right)$$

3.3. 내적의 의미 (proof)

$$\left\|\vec{B}-\vec{A}\right\|^2 = \left\|\vec{A}\right\|^2 + \left\|\vec{B}\right\|^2 - 2\left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\| Cos\theta$$



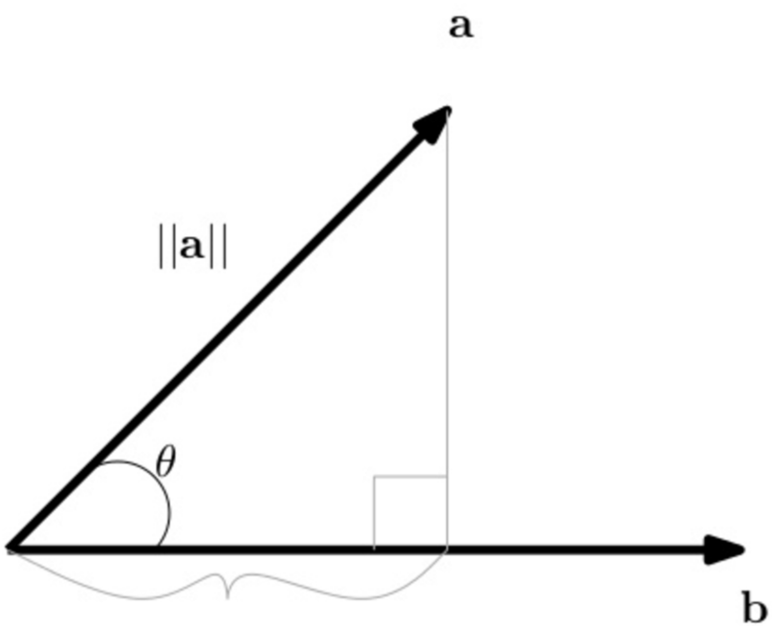
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\| Cos\theta$$

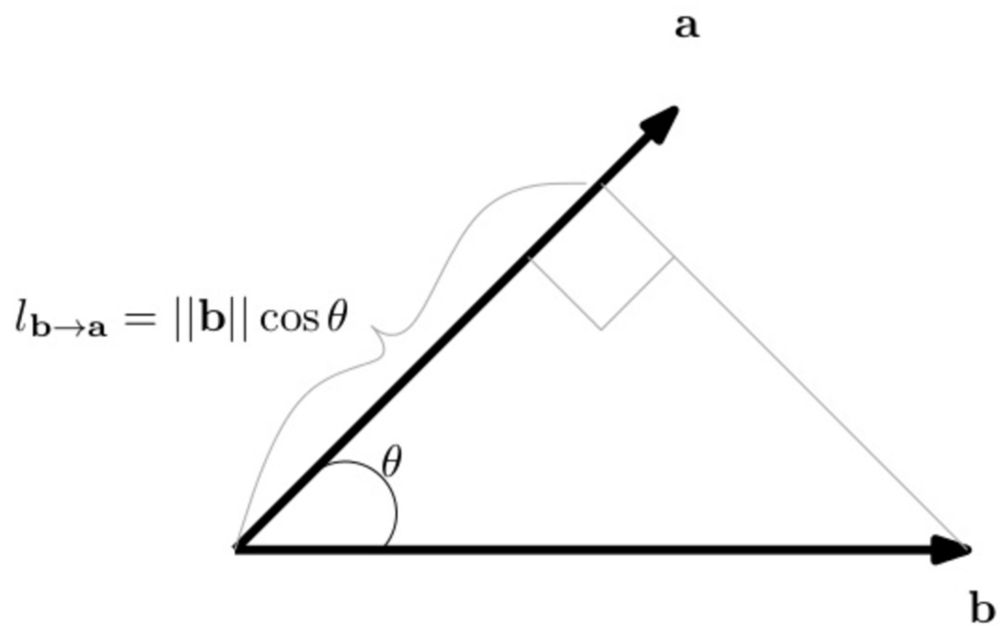
$$Cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|}$$

$$\theta = Cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|}\right)$$

3.4. 내적의 의미 2

- 같은 방향으로 나아가는 크기의 곱 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos(\theta)$





$$l_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} = ||\mathbf{a}|| \cos\theta$$

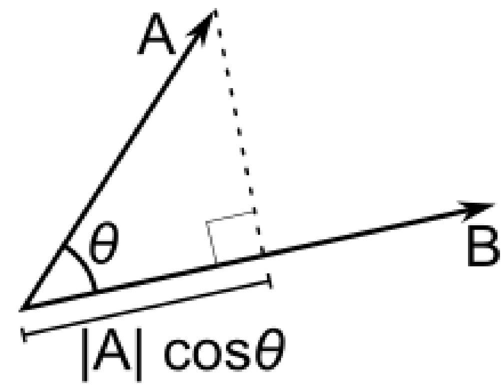
$$l_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} = (||\mathbf{a}||||\mathbf{b}|| \cos\theta)/||\mathbf{b}||$$
$$l_{\mathbf{a}\to\mathbf{b}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}/||\mathbf{b}||$$

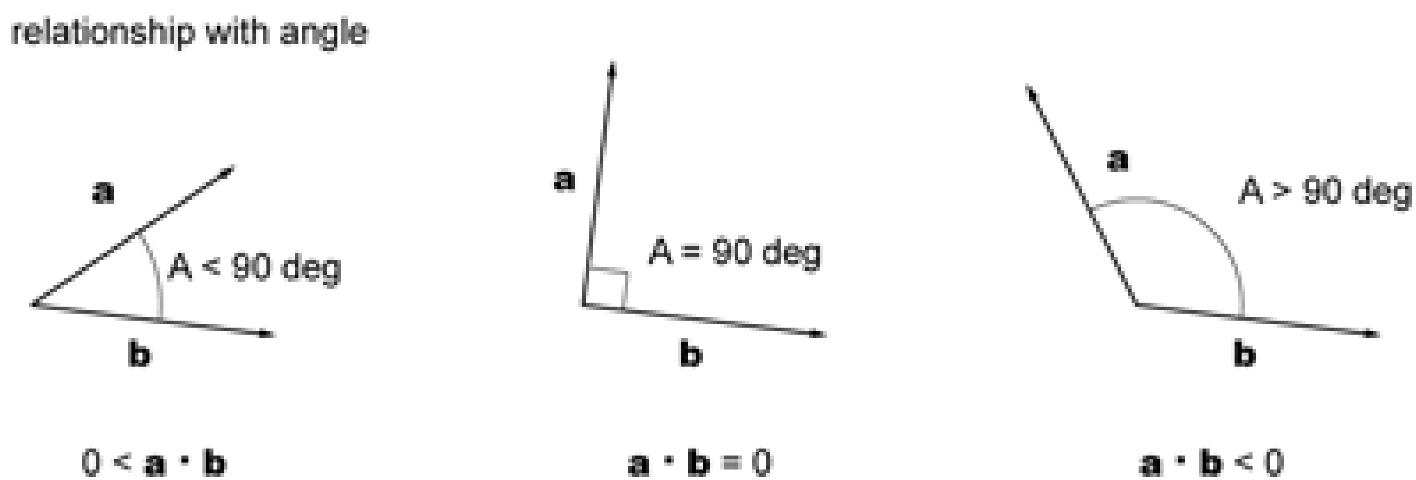
$$l_{\mathbf{b}\to\mathbf{a}} = (||\mathbf{a}||||\mathbf{b}|| \cos\theta)/||\mathbf{a}||$$
$$l_{\mathbf{b}\to\mathbf{a}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}/||\mathbf{a}||$$

3.5. 내적의 의미 3

- 내적 (Dot product)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos(\theta)$$



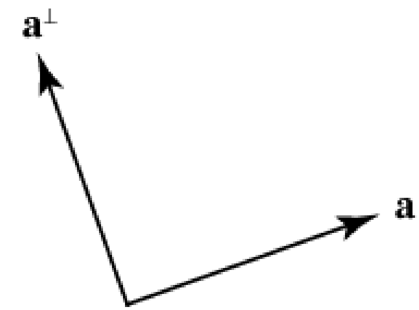


$$\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ||\mathbf{a}||||\mathbf{b}||$$
$$\theta = \pi/2 \Rightarrow \cos\theta = 0, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

3.6 Perpendicular, Orthogonal, Orthonormal?

- Perpendicular (수직)

$$a \perp b \ \rightarrow \ a \cdot b = 0$$



- Orthogonal (직교)

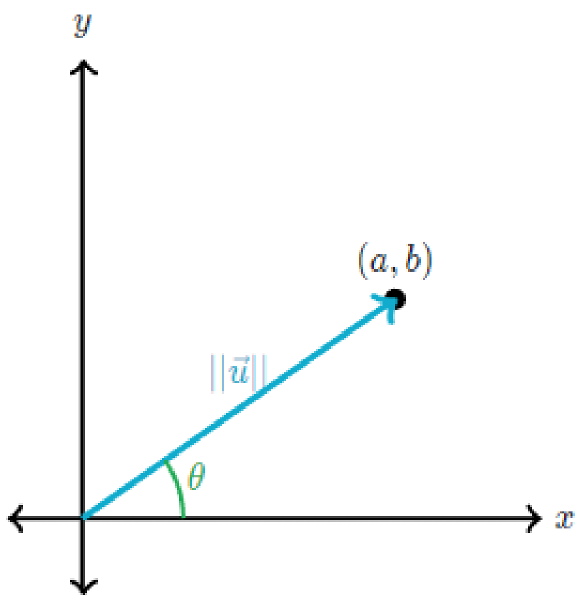
$$a \cdot b = 0 \ \rightarrow \ \text{orthogonal}$$

- Orthonormal (정규직교) = Orthogonal + Unit Vector

$$a \cdot b = 0, ||a|| = ||b|| = 1 \ \rightarrow \ \text{orthonormal}$$

3.7. 크기와 각도를 이용한 벡터 표현

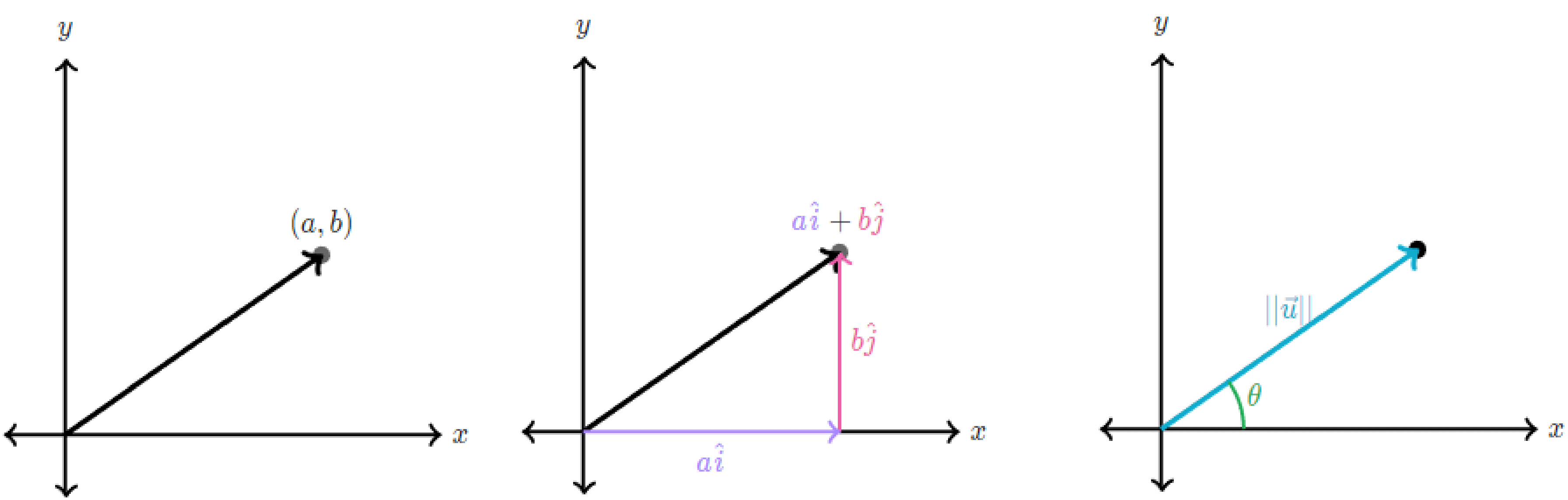
- 벡터(Vector)는 힘(magnitude)과 방향(direction)을 가진다.



Magnitude of (a, b)
$\|\|(a, b)\|\| = \sqrt{a^2 + b^2}$
Direction of (a, b)
$\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$

3.8. 벡터의 다양한 표현 방식

Component form	(a, b)
Unit vectors	$a\hat{i} + b\hat{j}$
Magnitude and direction	$\lvert\lvert\vec{u}\rvert\rvert,\ \theta$



3.9. Matrix 식 벡터 표현

- Vector을 matrix로 표현할 때는 **column vector**를 이용

$$\vec{a} = (3, 4) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Transpose를 적용 한 vector는 **row vector**로 표현

$$\vec{a}^\top = [3, 4]$$

3.10. Matrix 식 내적 표현

- 내적 (Inner Product의 Matrix 식 표현)

$$x^T y \in \mathbb{R} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

- Inner product와 Norm 의 관계

$$\|x\|_2^2 = x^T x$$

Chapter 4. Matrix

Matrix와 기초 연산에 대해 알아봅시다

4.1. 행렬(Matrix)의 역사

- 1차 방정식의 풀이에 아주 오래 전부터 사용
- 그 특성이 정확히 파악되지 않고 1800년대 까지는 배열(array)이라는 이름으로 알려짐
- 기원전 10세기에서 기원전 2세기 사이에 여러 세대에 걸쳐 쓰여진 중국의 구장산술에 연립 방정식을 풀기 위해 소개
- 1545년에야 이탈리아 수학자 지롤라모 카르다노(Girolamo Cardano)가 저서 “위대한 기술(Ars Magna)”를 통해 유럽에 전함
- 오랜 기간 많은 수학자들이 행렬을 다루며 다양한 성질을 발견
- 행렬은 공간을 다루는데 필요한 유용한 도구
- 공간 내의 점들을 어떤 위치에서 다른 위치로 옮겨 놓는 다양한 변환이 행렬을 이용하여 표현됨

4.2. 행렬(Matrix)

- Matrix = m행(row)와 n열(column)로 이루어진 숫자 묶음

$$A = \begin{array}{c} \text{3 columns} \\ \downarrow \; \downarrow \; \downarrow \\ \begin{bmatrix} -2 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \text{2 rows}$$

- Matrix 의 elements 와 dimensions

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} & \cdots & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} & \cdots & \mathbb{R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} & \cdots & \mathbb{R} \end{bmatrix} \equiv \mathbb{R}^{m \times n}$$

4.3. Linear system의 matrix 표현

System of equations:

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 10 \\ 3x + 4y &= 24 \end{aligned}$$

Augmented matrix:

$$\begin{array}{c l} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 5 & 10 \\ 3 & 4 & 24 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \longleftarrow \text{Eq. } 1 \\ \longleftarrow \text{Eq. } 2 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & \text{constants} \end{array} & \end{array}$$

4.4. Matrix row Operation

Matrix row operation	Example
Switch any two rows	$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ (Interchange row 1 and row 2.)
Multiply a row by a nonzero constant	$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ (Row 1 becomes 3 times itself.)
Add one row to another	$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3+2 & 4+5 & 6+3 \end{bmatrix}$ (Row 2 becomes the sum of rows 2 and 1.)

4.5. Solving Linear system with matrix row op.

Original matrix: $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 10 \\ -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

Step	Row operation
Step 1: $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & 13 \end{bmatrix}$	$R_1 - R_2 \rightarrow R_1$
Step 2: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 13 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}R_1 \rightarrow R_1$
Step 3: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -13 \end{bmatrix}$	$R_1 + R_2 \rightarrow R_2$
Step 4: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & -13 \end{bmatrix}$	$-1R_2 \rightarrow R_2$

4.6. Matrix의 기초 연산

- Addition $C = A + B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 & 8+0 \\ 3+5 & 7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

- Subtraction (the inverse of addition)

$$C - D = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 11 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-5 & 8-6 \\ 0-11 & 9-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix}$$

- Scalar Multiplication $cA \quad \Leftrightarrow \quad ca_{ij}$

$$2A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10 & 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 12 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

4.7. Zero Matrix

3×3 zero matrix: $$O_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2×4 zero matrix: $$O_{2\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

The number zero	**The zero matrix**
Adding zero to any number a gives back that number a. (eg. $a + 0 = a$)	Adding a zero matrix to any matrix A gives back the matrix A. (eg. $A + O = O + A = A$)
Adding any number to its opposite will give zero. (eg. $a + (-a) = 0$)	Adding any matrix to its opposite will give a zero matrix. (e.g. $A + (-A) = O$)
Any number times zero is zero. (e.g $a \cdot 0 = 0$).	Scalar multiplication of a matrix by 0 will give a zero matrix. (eg. $0A = O$)

4.8. Matrix addition 성질

Property	Example
Commutative property of addition	$A + B = B + A$
Associative property of addition	$A + (B + C) = (A + B) + C$
Additive identity property	For any matrix A, there is a unique matrix O such that $A + O = A$.
Additive inverse property	For each A, there is a unique matrix $-A$ such that $A + (-A) = O$.
Closure property of addition	$A + B$ is a matrix of the same dimensions as A and B.

4.9. Matrix scalar multiplication 성질

Property	Example
Associative property of multiplication	$(cd)A = c(dA)$
Distributive properties	$c(A + B) = cA + cB$
	$(c + d)A = cA + dA$
Multiplicative identity property	$1A = A$
Multiplicative properties of zero	$0 \cdot A = O$
	$c \cdot O = O$
Closure property of multiplication	cA is a matrix of the same dimensions as A.

4.10. 벡터를 이용한 행렬(Matrix)표현

- (Column) Vector를 이용한 Matrix 표현

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

- (Row) Vector를 이용한 Matrix 표현

$$A = \begin{bmatrix} — & a_1^T & — \\ — & a_2^T & — \\ & \vdots & \\ — & a_m^T & — \end{bmatrix}$$

$$\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \end{bmatrix}} \times \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{bmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{12} \end{bmatrix}}$$

Chapter 5. Matrix Multiplication

행렬의 여러가지 곱셈 방법을 알아봅시다.

5.1. Vector-Vector 곱셈

- 내적 (= Inner Product (= Dot product))

$$x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$x^T y \in \mathbb{R} = \left[\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{array} \right] = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

$$x^T y = y^T x$$

5.2. Matrix-Matrix 곱셈

- Matrix-Matrix의 곱을 살펴보기 전, Matrix 의 row와 column vector 를 다시 생각해 봅시다

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \vec{c_1} & \vec{c_2} \end{array} \\ \begin{array}{c} \vec{r_1} \\ \vec{r_2} \end{array} & \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \vec{c_1} & \vec{c_2} & \vec{c_3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \vec{r_1} \\ \vec{r_2} \\ \vec{r_3} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

5.3. Matrix-Matrix 곱셈 (2)

- Matrix-Matrix의 곱의 **정의**

$$\underset{A}{\begin{array}{cc} \begin{array}{c}\vec{a_1}\rightarrow\\ \vec{a_2}\rightarrow\end{array} & \begin{bmatrix}1&7\\2&4\end{bmatrix}\end{array}} \cdot \underset{B}{\begin{array}{c} \begin{array}{cc}\vec{b_1} & \vec{b_2}\\ \downarrow & \downarrow\end{array} \\ \begin{bmatrix}3&3\\5&2\end{bmatrix}\end{array}} = \underset{C}{\begin{bmatrix}\vec{a_1}\cdot\vec{b_1} & \vec{a_1}\cdot\vec{b_2}\\ \vec{a_2}\cdot\vec{b_1} & \vec{a_2}\cdot\vec{b_2}\end{bmatrix}}$$

- 이는 row와 column vector들 간의 내적 (dot product)

$$\vec{a_1}\cdot\vec{b_2} \longrightarrow c_{1,2}$$

$$\begin{bmatrix}1&7\\2&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&3\\5&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{a_1}\cdot\vec{b_1} & 17\\ \vec{a_2}\cdot\vec{b_1} & \vec{a_2}\cdot\vec{b_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}38&17\\26&14\end{bmatrix}$$

5.4. Matrix-Matrix 곱셈 (3)

- Row 와 Column 벡터들 간의 내적으로 표현

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ and $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $a_i \in \mathbb{R}^n$ and $b_j \in \mathbb{R}^n$

$$C = AB = \begin{bmatrix} — & a_1^T & — \\ — & a_2^T & — \\ & \vdots & \\ — & a_m^T & — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_p \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^T b_1 & a_1^T b_2 & \cdots & a_1^T b_p \\ a_2^T b_1 & a_2^T b_2 & \cdots & a_2^T b_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m^T b_1 & a_m^T b_2 & \cdots & a_m^T b_p \end{bmatrix}$$

5.5. Matrix-Matrix 곱셈 (4)

- Matrix 간 곱이 성립하려면 다음과 같이 matrix의 차원이 맞아야 합니다.

$$
\begin{array}{c c}
\vec{a_1} \rightarrow & \\
\vec{a_2} \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \\
\vec{a_3} \rightarrow & \\
& A
\end{array}
\cdot
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \vec{b_1} & \vec{b_2} & \vec{b_3} & \vec{b_4} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \\
B
\end{array}
=
\begin{bmatrix}
\vec{a_1} \cdot \vec{b_1} & \vec{a_1} \cdot \vec{b_2} & \vec{a_1} \cdot \vec{b_3} & \vec{a_1} \cdot \vec{b_4} \\
\vec{a_2} \cdot \vec{b_1} & \vec{a_2} \cdot \vec{b_2} & \vec{a_2} \cdot \vec{b_3} & \vec{a_2} \cdot \vec{b_4} \\
\vec{a_3} \cdot \vec{b_1} & \vec{a_3} \cdot \vec{b_2} & \vec{a_3} \cdot \vec{b_3} & \vec{a_3} \cdot \vec{b_4}
\end{bmatrix}
$$

- 즉, 순수하게 차원 곱으로 만 나타내면 이렇습니다.

$$(m \times n) \cdot (n \times k) = (m \times k)$$

product is defined

5.6. Identity Matrix

- (n x n) Identify Matrix 는 다음과 같이 **정의**

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 기왕 하는 김에 Diagonal 함수 및 행렬 **정의**도 알아봅시다

$$D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n) \qquad D_{ij} = \begin{cases} d_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$I = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)$$

5.7. Identity Matrix (2)

- Identity Matrix 는 다음과 같은 성질을 만족합니다.

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

- 과연…

$$\begin{array}{r} \vec{i_1} \rightarrow \\ \vec{i_2} \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrix I

$$\begin{array}{cc} \vec{a_1} & \vec{a_2} \\ \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{array}$$

matrix A

$$I_2 \cdot A = \begin{bmatrix} \vec{i_1} \cdot \vec{a_1} & \vec{i_1} \cdot \vec{a_2} \\ \vec{i_2} \cdot \vec{a_1} & \vec{i_2} \cdot \vec{a_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

5.8. Matrix 곱셈의 성질

Property	Example
The commutative property of multiplication does not hold!	$AB \neq BA$
Associative property of multiplication	$(AB)C = A(BC)$
Distributive properties	$A(B+C) = AB + AC$
	$(B+C)A = BA + CA$
Multiplicative identity property	$IA = A$ and $AI = A$
Multiplicative property of zero	$OA = O$ and $AO = O$
Dimension property	The product of an $m \times n$ matrix and an $n \times k$ matrix is an $m \times k$ matrix.

In this table, A, B, and C are $n \times n$ matrices, I is the $n \times n$ identity matrix, and O is the $n \times n$ zero matrix

5.9. Matrix 곱셈의 성질 (2)

- Why not Commutative?

$$\underset{\text{matrix } A}{\begin{array}{l} \vec{a_1} \rightarrow \\ \vec{a_2} \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} \qquad \underset{\text{matrix } B}{\begin{array}{c} \vec{b_1} \quad \vec{b_2} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array}} \qquad\qquad \underset{\text{matrix } B}{\begin{array}{l} \vec{b_1} \rightarrow \\ \vec{b_2} \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}} \qquad \underset{\text{matrix } A}{\begin{array}{c} \vec{a_1} \quad \vec{a_2} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}}$$

We can find AB as follows:

$$AB = \begin{bmatrix} \vec{a_1} \cdot \vec{b_1} & \vec{a_1} \cdot \vec{b_2} \\ \vec{a_2} \cdot \vec{b_1} & \vec{a_2} \cdot \vec{b_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \cdot 6 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \\ 1 \cdot 6 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 30 & 14 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$$

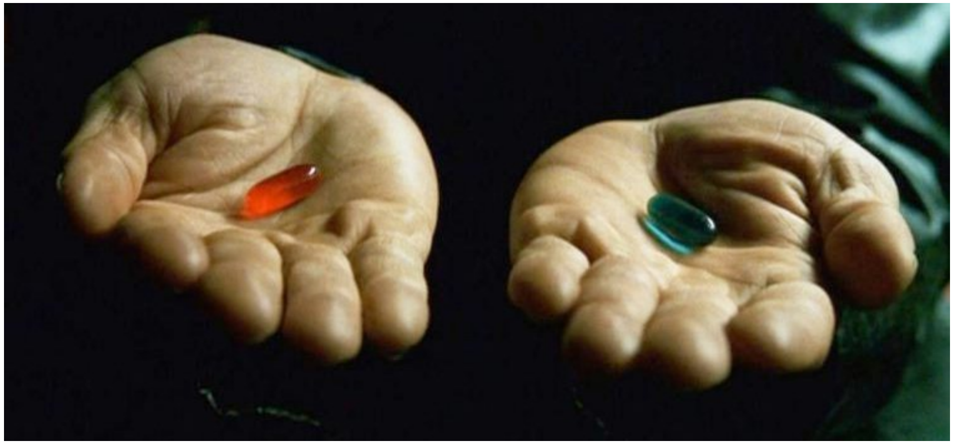
We can find BA as follows:

$$BA = \begin{bmatrix} \vec{b_1} \cdot \vec{a_1} & \vec{b_1} \cdot \vec{a_2} \\ \vec{b_2} \cdot \vec{a_1} & \vec{b_2} \cdot \vec{a_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 6 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 28 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}$$

수고하셨습니다.
여기까지가 일단 기초적인 Matrix **곱셈**의 **끝**입니다.



Chapter 6. Vector and Space (심화)

6.1. Linear Combination

- Vector들의 Linear Combination

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

- 하나의 Vector를 Linear Combination으로 나타내기

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6.2. Span

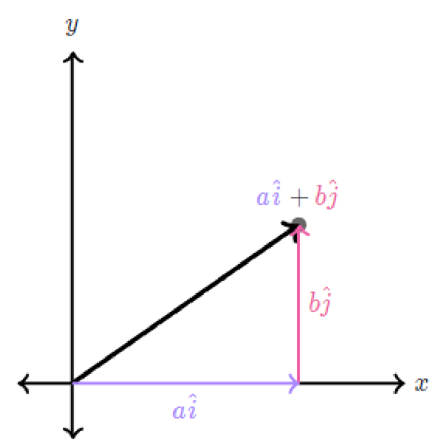
- linear combination으로 만들 수 있는 모든 백터의 집합

$$\mathrm{span}(\{x_1, \ldots x_n\}) = \left\{ v : v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

- 예를 들어 앞서 배운 Unit Vector의 조합으로 모든 2차원 vector를 표현 할 수 있었습니다.

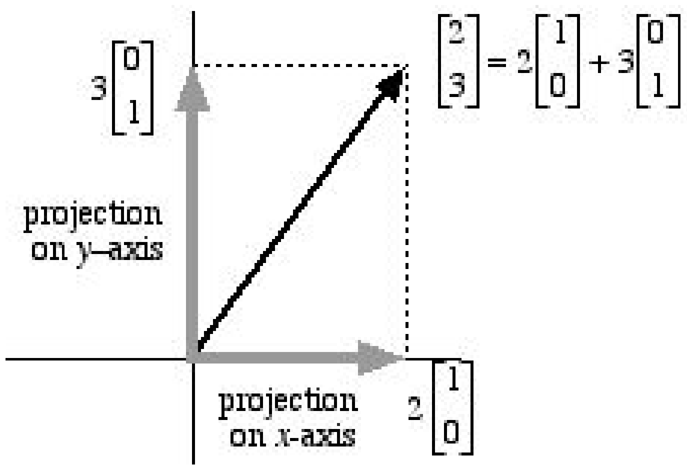
$$\mathbb{R}^2 = \{a\hat{i} + b\hat{j} \,|\, a, b \in \mathbb{R}\} = \ \mathrm{span}\left(\{\hat{i}, \hat{j}\}\right)$$

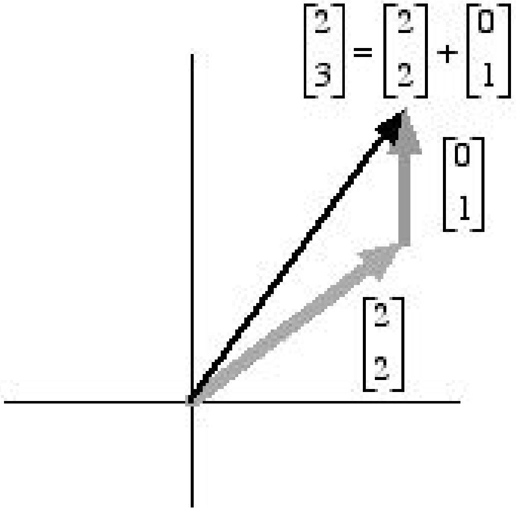
$$\hat{i} = (1, 0)$$
$$\hat{j} = (0, 1)$$



6.3. Span (2)

- 그런데.. 똑같은 vector를 Unit vector가 아닌 다른 vector 들의 조합으로도 만들 수 있습니다.





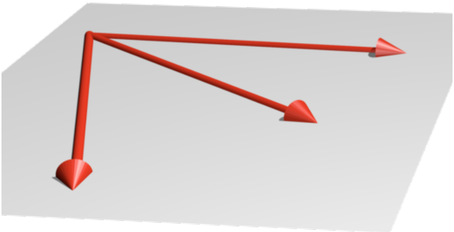
- *Span({(1,0),(0,1)})* = *Span({(2,2),(0,1)})* = 2차원

6.4. Linearly dependent

- Span{ (0,1), (0,2) } 은 2차원을 표현 할 수 있을까요?
  - 불가능합니다... 왜 그럴까요?
  - V1 와 V2 (0,2)가 서로 linearly dependent하기 때문입니다.
    - c * V1 = V2

- Linear Dependent

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v} \in S_1, \mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n.$$



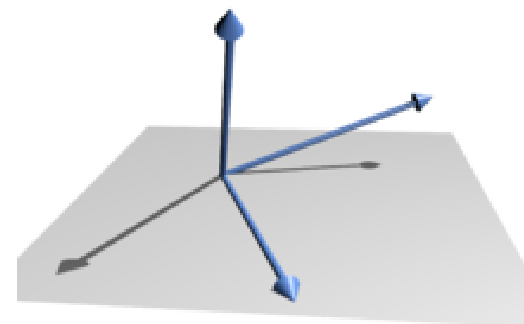
6.5. Linearly independent

- Linear independent

$$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$$

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

satisfied by $a_i = 0$ for $i = 1, \dots, n$.



- Basis for Set V

  = A minimal subset of V that constitutes Span(V)

  V ={ (0,1), (0,2) }

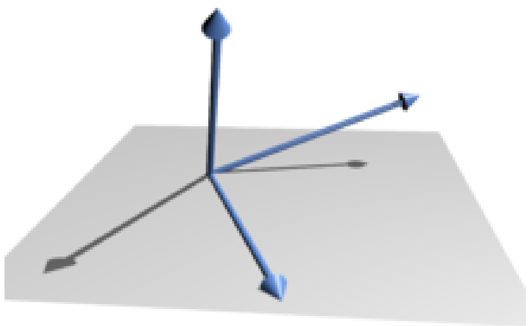
  Span(V) = Span{ (0,1), (0,2) } = Span{ (0,1) }

  Basis = { (0,1) } or { (0,2) }

6.6 Linear Independence and Rank

- Linear independent

$$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$$
$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_k\vec{v}_k = \vec{0}$$
satisfied by $a_i = 0$ for $i = 1, \ldots, n.$



- Matrix A 의 Rank
  - Rank(A) = Largest subset of column vectors of A, that is Linear Independent
  - ex) Rank(A) = 1

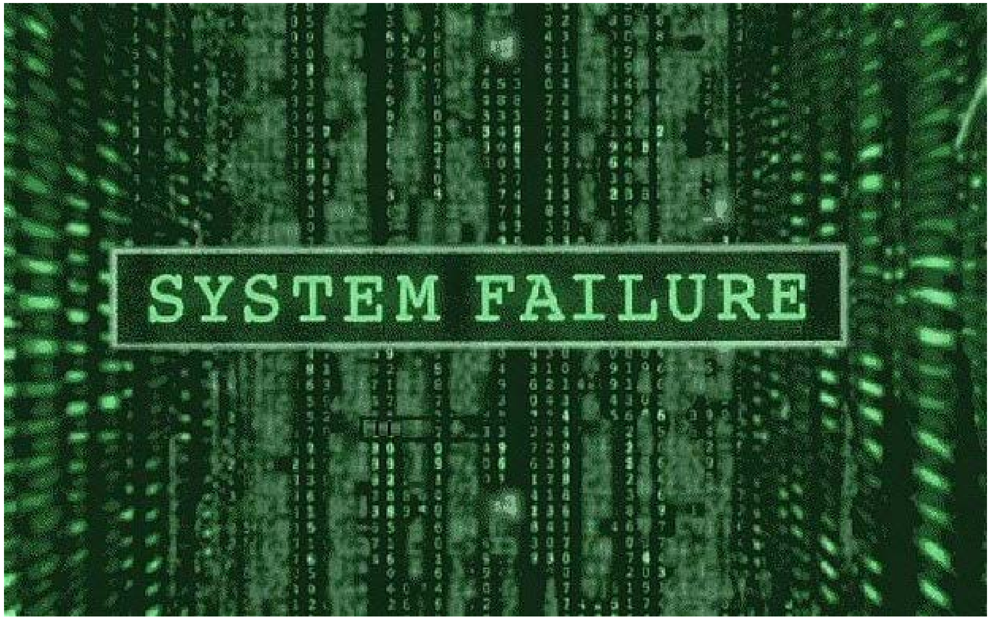
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

  - Ex) Rank(A) = 3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

이 밖에도.. Dim(), Nullity(), Subspace 등등 중요한 이론이 많습니다..

하지만 여기서는 다루지 않도록 하겠습니다…



Chapter 7. Matrix 곱셈 (심화)

Matrix 을 이용한 심화 곱셈을 알아봅시다.

7.0. 개요

- Chapter 5. 장에서 기초적인 Vector-Vector, Matrix-Matrix 곱을 알아 보았습니다.
- 그런데 사실 Matrix의 곱을 자유자제로 다루려면 Matrix-Vector 의 곱에 좀더 익숙해 지셔야 합니다.
- Matrix-Vector 곱셈의 다른 의미 또한 알아 봅시다.
- 이밖에 외적 (Outer Product) 곱에 대해서도 알아봅시다.

7.1. Matrix-Vector의 곱셈

- 내적(Inner Product)를 이용한 Matrix-Vector 곱 표현

$$y = Ax = \begin{bmatrix} — & a_1^T & — \\ — & a_2^T & — \\ & \vdots & \\ — & a_m^T & — \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} a_1^T x \\ a_2^T x \\ \vdots \\ a_m^T x \end{bmatrix}$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad y = Ax \in \mathbb{R}^m$$

$$y_i = a_i^T x$$

7.2. Matrix-Vector의 곱셈의 숨겨진 의미

- Matrix *A* 를 column vector로 나타내었을 때..

$$y = Ax = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ a_1 \\ \\ \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} \\ a_2 \\ \\ \end{bmatrix} x_2 + \ldots + \begin{bmatrix} \\ a_n \\ \\ \end{bmatrix} x_n$$

- Matrix column vector들의 Linear Combination!
  - 수식을 만족하는 Solution x'가 존재한다

$$y \in \text{span}(\{a_1, ..., a_n\}) = Ax$$

  - Solution x'가 존재하지 않는다.

$$y \notin \text{span}(\{a_1, ..., a_n\}) = Ax$$

7.3. 외적 (Vector-Vector 의 곱셈)

- 외적 (Outer Product)

$$x \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^n$$

$$xy^T \in \mathbb{R}^{m\times n} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_my_1 & x_my_2 & \cdots & x_my_n \end{bmatrix}$$

$$(xy^T)_{ij} = x_iy_j$$

7.4. 외적 (Vector-Vector 의 곱셈) (2)

- Example

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ x & x & \cdots & x \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_2 & x_2 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m & x_m & \cdots & x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = x\mathbf{1}^T$$

$$x \in \mathbb{R}^m$$

7.5. 외적을 이용한 Matrix 곱셈 표현

- Outer Product를 이용한 Matrix-Matrix 곱 표현

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ and } B \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} — & b_1^T & — \\ — & b_2^T & — \\ & \vdots & \\ — & b_n^T & — \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^T$$

7.6. Matrix-Matrix를 쪼개서 표현

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ and $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$

$$C = AB = A\begin{bmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_p \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_p \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$c_i = Ab_i$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} — & a_1^T & — \\ — & a_2^T & — \\ & \vdots & \\ — & a_m^T & — \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} — & a_1^T B & — \\ — & a_2^T B & — \\ & \vdots & \\ — & a_m^T B & — \end{bmatrix} \quad c_i^T = a_i^T B$$

Chapter 8. 기타 Matrix 연산

여기서 부 터는 **정의**만 한번 슥 훑어 보도록 합시다.

8.1. The Transpose

- Transpose = matrix의 row와 column을 뒤집는 연산

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

If $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$, then $A' or A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

- Transpose 기본 성질

$$(A^T)^T = A$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

8.2. Symmetric Matrix

A square matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- Symmetric Matrix $A = A^T$.

If $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, then $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

- Anti-symmetric Matrix $A = -A^T$

If $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 7 \\ -4 & -7 & 0 \end{bmatrix}$

$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & -7 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ and $-A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & -7 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

8.3. Symmetric Matrix (2)

- Property of Square matrix

$$\text{for any matrix } A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$A + A^T \text{ is symmetric}$$
$$A - A^T \text{ is anti-symmetric}$$

- 어떤 정방형 매트리스든 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

$A \in \mathbb{S}^n$ means that A is a symmetric $n \times n$ matrix

8.3. The Trace

$$\text{A square matrix } A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

- Trace = 대각 행렬의 합 (대각 합)

$$\mathbf{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- Property of the Trace

  - For $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}A^T$.
  - For $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B$.
  - For $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{tr}(tA) = t\,\mathrm{tr}A$.
  - For A, B such that AB is square, $\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}BA$.

8.4. The Inverse

- If A is a square matrix, the inverse of A is A^{-1}

$$AA^{-1} = \mathrm{I} \quad \text{and} \quad A^{-1}A = \mathrm{I}$$

- A^{-1} 가 존재 할 수도, 존재하지 않을 수도 있습니다
  - A^{-1}가 존재하지 않는다 -> det(A) 가 0이다 -> Singular Matrix
  - A^{-1}가 존재한다 -> det(A) 가 0이 아니다 -> Non-singular Matrix

- Non-singular Matrix A, B 에 대해서 다음의성질을 만족

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$

$$Ax = b$$

$$x = A^{-1}b$$

8.5. The Inverse (2)

- For 2-D matrix

$$\mathsf{A} \equiv \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathsf{A}|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{a\,d - b\,c}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 28 & 0 \\ 0 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- For 3-D matrix

$$\mathsf{A} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad \mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathsf{A}|}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}.$$

8.6. The Determinant

- Determinant: det(A) or |A|

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

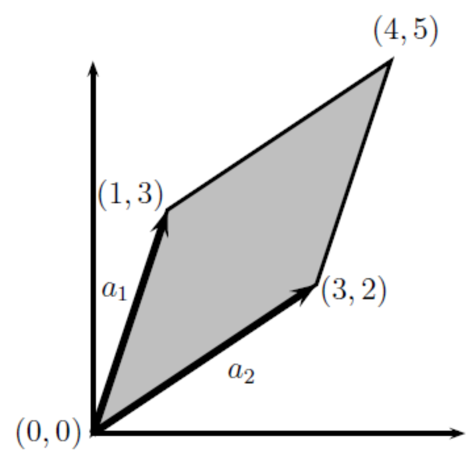
$$\det\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 2 - 15 = -13$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- |Det(A)|는 기하학 적으로 Col(A)들의 넓이를 의미

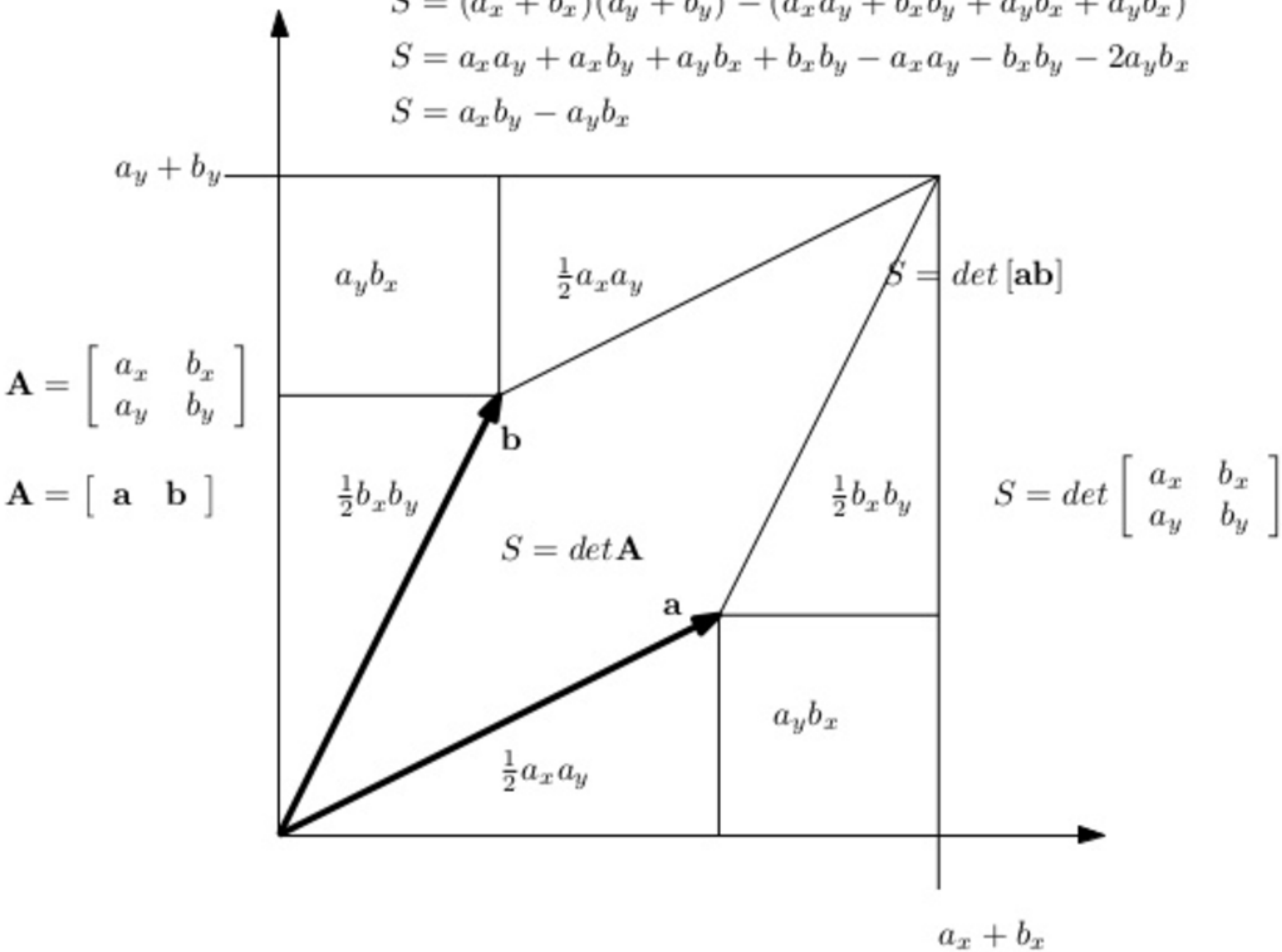
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

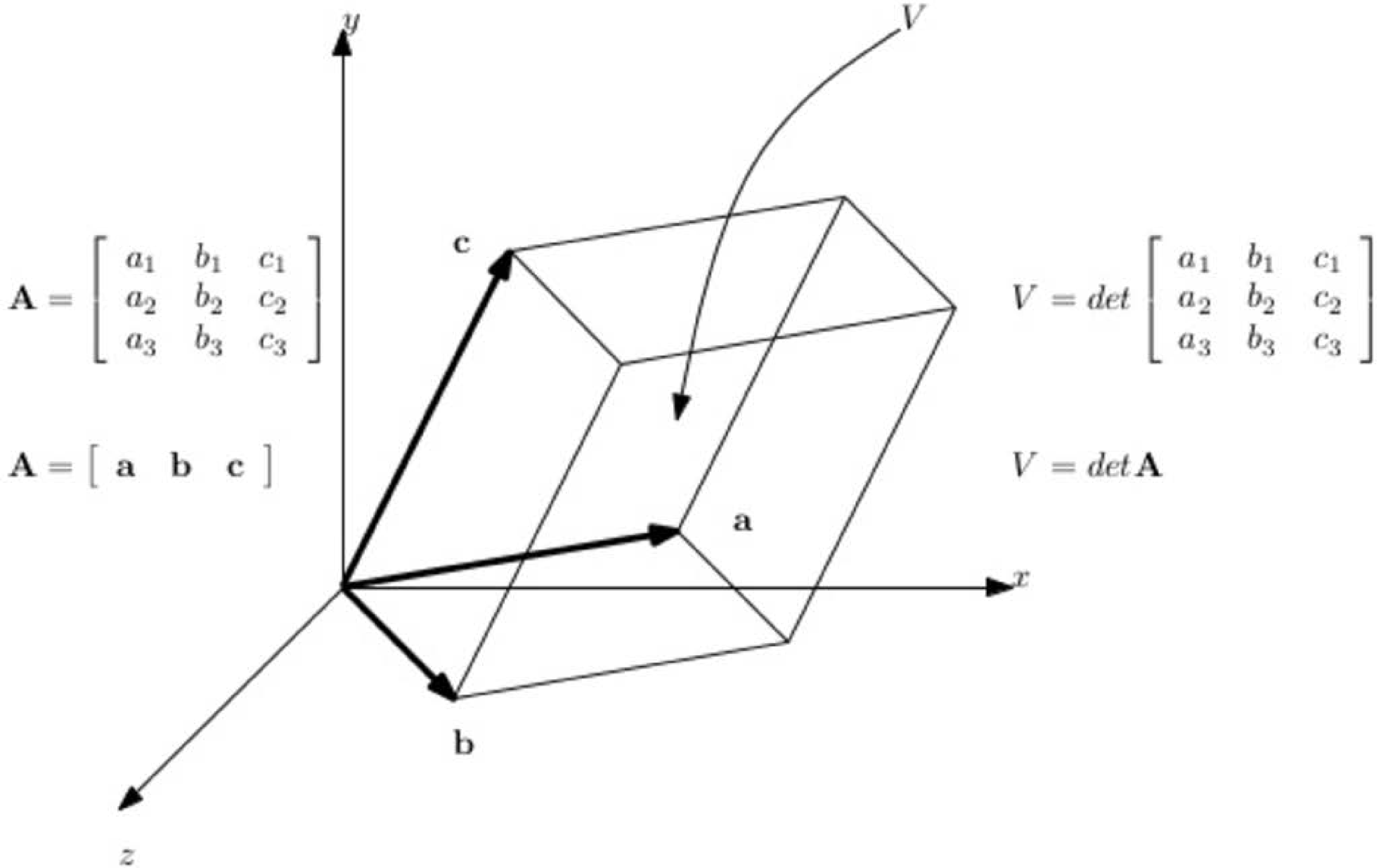


8.7. The Determinant 의미 proof

$$S = (a_x + b_x)(a_y + b_y) - (a_x a_y + b_x b_y + a_y b_x + a_y b_x)$$
$$S = a_x a_y + a_x b_y + a_y b_x + b_x b_y - a_x a_y - b_x b_y - 2a_y b_x$$
$$S = a_x b_y - a_y b_x$$



8.8. The Determinant – 3차원



8.9. Orthogonal, Orthogonal Matrices

- Orthonormal (정규직교) = Orthogonal + Unit Vector

$$a \cdot b = 0, ||a|| = ||b|| = 1 \ \rightarrow \ \text{orthonormal}$$

- Orthogonal Matrix
  - Orthonormal Vector로 구성된 정사각 행렬

$$U^T U = I = U U^T$$

$$U^{-1} = U^\top$$

- Other property

$$\text{for any } x \in \mathbb{R}^n, U \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ orthogonal}$$

$$\|Ux\|_2 = \|x\|_2$$

8.10. The Gradient

- (m by n) Matrix *A*를 인풋으로 받아 scalar를 계산하는 함수 f가 있다고 합시다.

$$f : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

- 함수 f 의 gradient w.r.t A는 다음과 같이 계산합니다.

$$\nabla_A f(A) \in \mathbb{R}^{m \times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(A)}{\partial A_{11}} & \frac{\partial f(A)}{\partial A_{12}} & \cdots & \frac{\partial f(A)}{\partial A_{1n}} \\ \frac{\partial f(A)}{\partial A_{21}} & \frac{\partial f(A)}{\partial A_{22}} & \cdots & \frac{\partial f(A)}{\partial A_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(A)}{\partial A_{m1}} & \frac{\partial f(A)}{\partial A_{m2}} & \cdots & \frac{\partial f(A)}{\partial A_{mn}} \end{bmatrix}$$

- 즉,

$$(\nabla_A f(A))_{ij} = \frac{\partial f(A)}{\partial A_{ij}}$$

8.11. The Gradient (2)

- 만약 f의 input 이 vector *x* 라면?

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

- 함수 f의 gradient w.r.t *x*는 다음과 같이 계산합니다.

$$\nabla_x f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

- 즉,

$$(\nabla_A f(A))_{ij} = \frac{\partial f(A)}{\partial A_{ij}}$$

8.12. The Hessian

- n 차원 Vector *x* 를 인풋으로 받아 scalar를 계산하는 함수 f 가 있다고 합시다.

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

- 함수 f 의 gradient w.r.t *A*는 다음과 같이 계산합니다.

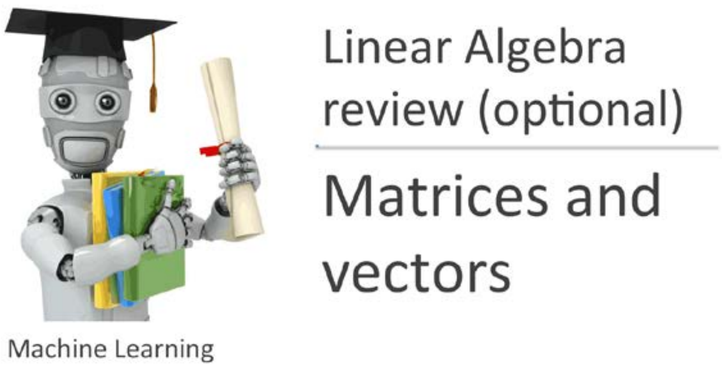
$$\nabla_x^2 f(x) \in \mathbb{R}^{n \times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

- 즉,

$$(\nabla_x^2 f(x))_{ij} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Reference

- Linear Algebra에 대해서 더욱 공부해보고 싶으신 분들은 다음의 자료를 참고하시기 바랍니다.
    - Khanacademy
    - Coding the Matrix
    - CS 229 – Linear Algebra review



수고하셨습니다!